Recenzja
pracy doktorskiej magistra Dawida Kotrysa
na temat: Silnie wypukłe procesy stochastyczne

Niech $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $I \subset \mathbb{R}$ przedziałem. Funkcję $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *procesem stochastycznym*, jeśli funkcje $X(t, \cdot)$ są $\mathcal{A}$-mierzalne dla $t \in I$. Proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *wypukłym*, jeśli dla wszystkich $u, v \in I$ oraz $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) \leqslant \lambda X(u, \cdot) + (1 - \lambda)X(v, \cdot) \quad (p.w.).$$

Każdą $\mathcal{A}$-mierzalną funkcję $C : \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *zmienną losową*. Niech C : $\Omega \to \mathbb{R}$ będzie dodatnią zmienną losową, proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ nazywamy *silnie wypukłym z modułem* $C(\cdot)$, jeśli dla dowolnych $u, v \in I$ i dla każdego $\lambda \in [0, 1]$ zachodzi nierówność

$$X(\lambda u + (1 - \lambda)v, \cdot) \leqslant \lambda X(u, \cdot) + (1 - \lambda)X(v, \cdot) - C(\cdot)\lambda(1 - \lambda)(u - v)^2 \quad (p.w.).$$

Rozdział 1 zawiera definicje: $\mathcal{P}$-ograniczoności, ciągłości i różniczkowalności według prawdopodobieństwa procesów stochastycznych. Dla procesów rzędu drugiego (inaczej procesów Hilberta) t.j. procesów stochastycznych spełniających warunek $E[X(t, \cdot)]^2 < \infty$ dla wszystkich $t \in I$ autor definiuje ciągłość, różniczkowalność, dwukrotną różniczkowalność średniokwadratową na przedziale i całkowalność średniokwadratową na przedziale zwartym, oraz dowodzi kilku własności całek średniokwadratowych.

W Rozdziale 2 zostały przedstawione stochastyczne odpowiedniki klasycznych twierdzeń dotyczących funkcji wypukłych i silnie wypukłych. Autor najpierw dowodzi, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby proces stochastyczny był silnie wypukły z modułem $C(\cdot)$ jest by był sumą procesu wypukłego i procesu $(t, \omega) \mapsto C(\omega)t^2$. Dalej występują dowody twierdzeń: o charakteryzacji silnej wypukłości z modułem $C(\cdot)$ procesów stochastycznych przez istnienie podparć specjalnej postaci, o charakteryzacji silnej wypukłości różniczkowalnych średniokwadratowo procesów stochastycznych za pomocą I pochodnej średniokwadratowej i o charakteryzacji dwukrotnie różniczkowalnych średniokwadratowo procesów stochastycznych za pomocą II pochodnej średniokwadratowej. Każde z tych twiedzeń poprzedzone jest odpowiednim lematem dotyczącym wypukłości procesów stochastycznych. Dalsza część rozdziału zawiera dowody twierdzeń o nierównościach spełnianych przez silnie wypukłe procesy stochastyczne takich jak: dyskretna nierówność typu Jensena, całkowa nierówność typu Jensena, nierówność typu Hermite'a-Hadamarda oraz nierówność typu Fejéra.

W Rozdziale 3 udowodniono, że jeśli dla ustalonego $\lambda \in (0,1)$ proces stochastyczny $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest silnie λ-wypukły z modułem $C(\cdot)$ t.zn. spełnia nierówność

$$X(\lambda u + (1-\lambda)v, \cdot) \leqslant \lambda X(u, \cdot) + (1-\lambda)X(v, \cdot) - C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \quad (p.w.).$$

dla $u, v \in I$, to jest on silnie J-wypukły (t.zn. jest $\frac{1}{2}$-wypukły) z tym samym modułem.

Dla procesów silnie J-wypukłych z modułem $C(\cdot)$ pokazano:
- dwa twierdzenia o nierównościach typu Jensena,
- że, z $\mathcal{P}$-ograniczoności z góry na przedziale $(a,b) \subset I$ wynika $\mathcal{P}$-ciągłość i silna wypukłość z tym samym modułem,
- że, $\mathcal{P}$-ciągłość jest równoważna silnej wypukłości z modułem $C(\cdot)$,
- że, z mierzalności procesu $X : I \times \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ wynika $\mathcal{P}$-ciągłość i silna wypukłość z tym samym modułem.

Ostatni, Rozdział 4 poświęcony jest procesom stochastycznym silnie wypukłym w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$ t.j. procesom stochastycznym $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ spełniającym prawie wszędzie nierówność

$$X(\lambda u+(1-\lambda)v, \cdot)+X((1-\lambda)u+\lambda v, \cdot) \leqslant X(u, \cdot)+X(v, \cdot)-2C(\cdot)\lambda(1-\lambda)(u-v)^2$$

dla każdego $\lambda \in [0,1]$ oraz dla dowolnych $u, v \in I$. Zostało tu pokazane, że proces jest silnie wypukły w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest on sumą procesu silnie wypukłego z modułem $C(\cdot)$ i procesu addytywnego. Pokazano też, że jeśli $X : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest procesem silnie J-wypukłym z modułem $C(\cdot)$, a $Y : I \times \Omega \to \mathbb{R}$ jest procesem silnie J-wklęsłym (t.zn. $-Y$ jest J-wypukły) z tym samym modułem oraz $X(u, \cdot) \leqslant Y(u, \cdot)$ (p.w.) dla wszystkich $u \in I$, to istnieje addytywny proces stochastyczny $A : \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ taki, że $X - A$ i $Y - A$ są ciągłymi procesami stochastycznymi odpowiednio silnie wypukłym i silnie wklęsłym z modułem $C(\cdot)$.

Rozprawa jest naturalną kontynuacją pracy [20] prof. Kazimierza Nikodema z roku 1980 o wypukłych procesach stochastycznych oraz prac [26] i [27] Arkadiusza Skowrońskiego z lat 1992 i 1995 o J-wypukłych i o wypukłych w sensie Wrighta procesach stochastycznych. Jest ona obszernym studium własności procesów stochastycznych silnie wypukłych z modułem $C(\cdot)$, silnie J-wypukłych z modułem $C(\cdot)$ i silnie wypukłych w sensie Wrighta z modułem $C(\cdot)$. W pracy zamieszczono też nowe, potrzebne autorowi, rezultaty dotyczące procesów wypukłych. Uważam, że wszystkie twierdzenia udowodnione w pracy są poprawne i nowe, a dowody zwięzłe. Praca jest interesująca. Niestety nie jest starannie zredagowana.

Oto wykaz uwag:

- (**4_6**) Zdanie "Nierówność ta wynika natychmiast z definicji całki średniokwadratowej." wymaga wyjaśnienia.
- (**5_{3-1}**) Brak założeń o m i n w Lemacie 4.
- (**6^9**) Nie jest prawdą, że własności (i)-(iii) są uzasadnione w [28], przynajmniej w tłumaczeniu polskim tej książki. Własności (i) oraz (ii) są, jedynie zacytowane jako wzory (2.29) i (2.30) na str. 107. Definicja całki średniokwadratowej ze str. 4 nie daje się zastosować do całki $\int_b^a X(t,\cdot)dt$, gdy $a < b$. W analizie matematycznej nie dowodzi się własności (*iii*) (zob. S. Banach, Rachunek różniczkowy i całkowy T.2 albo W. Leksiński, I. Nabiałek, W. Żakowski, Matematyka. Definicje, twierdzenia, przykłady. Zadania. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne. Warszawa 1992, s.211). Wzór (*iii*) jest tam definicją.
- (**$6^{10\ 15}$**) Dowód tezy (iv) Lematu 4 jest nie do przyjęcia. Przeprowadzony rachunek w dowodzie (iv) sugeruje, że m jest liczbą dodatnią. Jednak w zastosowaniu (iv) do dowodu Lematu 5 jest $m = -1$. To trzeba wyjaśnić.
- (**11_{9-7}**) Brakuje sprecyzowania które własności całki średniokwadratowej autor ma na myśli.
- (**12^5** Powinno być "... jest silnie rosnąca z modułem $C(\cdot)$."
- (**$12_{8\ 6}$**) Zdanie "Połóżmy.." należałoby pominąć.
- (**19^3**) Czy założenia twierdzenia Fubiniego (np. nieujemność i mierzalność produktowa albo produktowa całkowalność) są spełnione? Dlaczego? Czy koniecznie trzeba korzystać z twierdzenia Fubiniego?
- (**20^2**) Warunek (22) nie zagadza się z ani z (20) ani z (21).
- (**30^5**) Zamiast "trzykrotnie" powinno być "dwukrotnie".

Rozprawa zawiera oryginalne rozwiązania wielu problemów naukowych na pograniczu teorii procesów stochastycznych i analizy wypukłej. Wnoszę o dopuszczenie jej autora mgra Dawida Kotrysa do dalszych etapów przewodu doktorskiego.

Katowice, 16 lipca 2015

Andrzej Smajdor

prof. dr hab. Andrzej Smajdor