Niebanalne zastosowania zasady pudełkowej Dirichleta

Paweł Gładki

Referat wygłoszony na I Obozie
Letnim Koła Naukowego Matematyków
przy Uniwersytecie Śląskim,
Zarzecze, 3-16. IX. 2001

Z elementarnej teorii liczb znamy następujące twierdzenie, sformułowane po raz pierwszy w 1842 roku przez Johanna Petera Gustava Lejeune - Dirichleta (1805-1859):

Twierdzenie **1** (zasada pudełkowa Dirichleta) *Jeśli* $\operatorname{card} X > n$, $n \in \mathbb{N}$, *oraz* $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$, *to dla pewnego* $i \in \{1, \ldots, n\}$*:*

$$\operatorname{card} X_i > 1 \quad ❏$$

Dowód prowadzi się metodą indukcji matematycznej i nie będziemy się nim tutaj dokładniej zajmować. Nie będziemy też udowadniać innej ciekawej własności, że mianowicie zasada Dirichleta równoważna jest aksjomatowi indukcji, zajmiemy się natomiast kilkoma zastosowaniami tego twierdzenia. Już w szkole rozwiązać można następujące proste zadanie:

Zadanie **1** *Udowodnić, że na Śląsku mieszkają przynajmnie dwie osoby mające taką samą liczbę włosów na głowie.* ❏

Nieco więcej pomysłowości wymaga rozwiązanie innegom zadania:

Zadanie **2** *Na płaszczyźnie danych jest 5 punktów o współrzędnych całkowitych. Udowodnić, że środek jednego z odcinków łączących 2 spośród tych punktów też ma całkowite współrzędne.* ❏

Zadań tych nie będziemy tu rozwiązywać - pozostawiamy je do pobawienia się czytelnikowi, podobnie jak i zadania zamieszczone na końcu referatu. Spróbujmy natomiast zająć się takim problemem:

Zadanie **3** *Która z cyfr, 7 czy 8, pojawia się częściej jako pierwsza cyfra liczb postaci* 2^n *?* ❏

Intuicyjnie trudno na to pytanie odpowiedzieć, co ilustruje poniższa tabela:

8	=	2^3	70368744177664	=	2^{46}
8192	=	2^{13}	$7\ldots$	=	2^{56}
$8\ldots$	=	2^{106}	$7\ldots$	=	2^{66}
			$7\ldots$	=	2^{76}

Zanim zabierzemy się do rozwiązywania naszego problemu, wybierzmy się na długi spacer po nieskończonym chodniku zbudowanym z płyt o długości $1-\epsilon$ oddzielonych szczelinami o szerokości $\epsilon > 0$. Załóżmy, że zaczynamy spacer w miejscu, w którym czubek buta dotyka do szczeliny. Postawmy następujące pytanie:

Czy można tak dobrać długość kroku, aby w czasie spaceru nigdy więcej nie nastąpić na szczelinę (za nadepnięcie na szczelinę uważamy dotknięcie jej wnętrza lub brzegu czubkiem buta)?

Aby udzielić odpowiedzi, rozpatrzmy kilka przypadków:

Przypadek I: Długość kroku $d = 1$. Wówczas w każdym kroku nadeptujemy na szczelinę.

Przypadek II: Długość kroku $d = k$, $k \in \mathbb{N}$. Sytuacja analogiczna.

Przypadek III: Długość kroku $d = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Tutaj po każdych q krokach mamy taką sytuację, jak po wykonaniu jednego kroku długości p.

Przypadek IV: Długość kroku $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Teraz "nawijamy" nasz chodnik na okrąg o promieniu $\frac{1}{2\pi}$, w którym wszystkie szczeliny zajmują to samo miejsce, a liczby naturalne pokrywają się z punktem O. Przez $x_1, x_2, \ldots$ oznaczamy kolejne ślady czubków butów, przy czym $x_1 = O$.

Ponieważ $d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, więc $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie na tyle duże, aby $\frac{1}{n} < \epsilon$. Podzielmy okrąg na n równych łuków długości $\frac{1}{n}$. Ponieważ spacer jest nieskończony, więc na mocy zasady pudełkowej Dirichleta istnieją $k, s \in \mathbb{N}$ takie, że x_k i x_{k+s} należą do tego samego łuku. Odległość między tymi krokami (liczona na chodniku) to oczywiście $s \cdot d$. Taka sama jest odległość między punktami x_{k+s} i x_{k+2s}, x_{k+2s} i x_{k+3s} itd. Wobec tego punkty $x_k, x_{k+s}, x_{k+3s}, \ldots$ leżą na okręgu jeden za drugim w ten sposób, że długość łuku łącząca dwa kolejne jest taka sama i mniejsza od $\frac{1}{n}$, więc i od ϵ. Zatem pewien wyraz tego ciągu trafia w ϵ-szczelinę.

Tym samym odpowiedź na postawione pytanie jest negatywna.

Przedstawione tu rozumowanie pomoże rozwiązać nasze zadanie. Udowodnimy w tym celu 3 lematy:

Lemat 1 *Liczba* $\log 2$ *jest niewymierna.*

D o w ó d : Dla dowodu nie wprost przypuśćmy, że $\log 2 = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$. Wówczas $2^q = 10^p$, co jest niemożliwe, bo 2^q nie dzieli się przez 5 (twierdzenie o jednoznaczności rozkładu na czynniki pierwsze). ❑

Lemat **2** *Dowolny skończony ciąg cyfr pojawi się jako początek zapisu pewnej potęgi dwójki.*

D o w ó d : Ustalmy liczbę M, której zapisem będzie dany skończony ciąg cyfr. Chcemy pokazać, że:

$$\bigvee_{n,k \in \mathbb{N}} 10^k M \leqslant 2^n < 10^k (M+1)$$

Inaczej (logarytmując powyższy związek):

$$\bigvee_{n,k \in \mathbb{N}} k + \log M \leqslant n \log 2 < \log(M+1) + k$$

Na osi liczbowej zaznaczamy odcinki postaci $[\log M + k, \log(M+1) + k]$ dla $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Wszystkie są równej długości $\log(M+1) - \log M = \log(1 + \frac{1}{M})$.

Ponieważ - na podstawie lematu 1 - liczba $\log 2$ jest niewymierna, więc rozumując jak w przypadku IV rozważanego wcześniej pytania otrzymujemy, że w pewnym kroku znajdziemy się w jednym ze wskazanych przedziałów, czyli potrafimy wskazać żądane n i k, co kończy dowód. ❑

Zilustrujemy ten zaskakujący lemat kilkoma przykładami:

M = 1410 (bitwa pod Grunwaldem)	$2^{3349} = 1,410\ldots \cdot 10^{1008}$
M = 1892 (urodziny Stefana Banacha)	$2^{8133} = 1,892\ldots \cdot 10^{2448}$

Dla ustalonej liczby naturalnej M zdefiniujmy pomocniczą wielkość zwaną roboczo *częstością wystąpień M-początków* jako granicę:

$$P(M) = \lim_{N \to \infty} \frac{\delta_M(N)}{N}$$

gdzie $\delta_M(N)$ oznacza liczbę tych mniejszych od N potęg dwójki, których zapis zaczyna się od cyfr tworzących liczbę M. [1] Odpowiedź na interesujące nas pytanie sprowadza się więc do porównania dwóch liczb:

$$P(7) \text{ i } P(8)$$

Lemat **3** *Częstość wystąpień M-początków wynosi:*

$$P(M) = \log(1 + \frac{1}{M})$$

[1] Z przeprowadzonego dalej rozumowania wynika, że granica ta istnieje i jest skończona. W szczególności częstość wystąpień M-początków nie ma nic wspólnego z miarą probabilistyczną!

D o w ó d : Z dowodu lematu 2 wynika, że liczba 2^n rozpoczyna się od układu cyfr określających liczbę M, jeśli spacerując krokiem o długości $\log 2$ "wdepniemy" do któregoś z regularnie rozmieszczonych przedziałów długości $a = \log(1 + \frac{1}{M})$.

"Nawijamy' oś liczbową na okrąg o promieniu $\frac{1}{2\pi}$ tak, by wartość $\log M$ pokrywała się z punktem A, a wartość $\log(M+1)$ z punktem B; łuk AB o długości a pełni rolę szczeliny, zaś $x_1, x_2, \ldots$ oznaczają ślady kolejnych "kroków" o długości $\log 2$.

Jeśli $\Delta_M(N)$ oznacza ilość wyrazów ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_N$, które znajdują sie we wskazanym łuku AB, to:

$$P(M) = \lim_{N\to\infty} \frac{\Delta_M(N)}{N}$$

Naturalnie, dla dostatecznie dużych $m \in \mathbb{N}$:

$$\bigvee_{n(m)\in\mathbb{N}} \frac{n(m)}{m} < a < \frac{n(m)+1}{m}$$

skąd otrzymujemy natychmiast:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n(m)}{m} = \lim_{m\to\infty} \frac{n(m)+1}{m} = a$$

Ustalmy liczbę m. Wobec zasady pudełkowej Dirichleta, w ciągu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieją wyrazy x_p i x_{p+q} takie, że odległość je łącząca na okręgu wynosi α, gdzie $\frac{1}{m+1} < \alpha < \frac{1}{m}$. Zauważmy, że ponieważ:

$$\bigwedge_{k\in\mathbb{N}} (k+q)\log 2 - k\log 2 = (p+q)\log 2 - p\log 2$$

więc długość łuków łączących punkty x_k i x_{k+q} jest równa odległości między x_p i x_{p+q}, dla $k \in \mathbb{N}$. Ustalmy liczbę N i - bez straty ogólności - załóżmy, że jest ona wielokrotnością liczby qm. Rozważmy tablicę:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_{1+q} & x_{1+2q} & \cdots & x_{1+(m-1)q} \\ x_2 & x_{2+q} & x_{2+2q} & \cdots & x_{2+(m-1)q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_q & x_{q+q} & x_{q+2q} & \cdots & x_{q+(m-1)q} \end{array}$$

W każdym z powyższych wierszy odległość między dwoma sąsiednimi wyrazami jest stała i wynosi α. Długość łuku pomiędzy x_s i $x_{s+(m-1)q}$, $s \in 1, \ldots, q$, jest nie większa niż $\frac{2}{m+1}$ i nie mniejsza niż $\frac{1}{m}$. Zatem w każdym z powyższych wierszy do łuku AB należy co najmniej $n(m) - 2$ elementów, bo:

$$(\frac{n(m)}{m} - \frac{2}{m+1}) : \frac{1}{m} = n(m) - \frac{2m}{m+1} \geqslant (n(m) - 2)$$

i nie więcej niż $n(m)+2$ elementów, gdyż:

$$\frac{n(m)+1}{m} : \frac{1}{m+1} = (n(m)+1)(1+\frac{1}{m}) = n(m)+1+\frac{n(m)+1}{m} \leqslant n(m)+2$$

Reasumując, w ciągu $x_1, x_2, \ldots, x_{qm}$ do łuku AB należy co najmniej $(n(m)-2)q$ elementów i nie więcej niż $(n(m)+2)q$ elementów. Stąd:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(n(m)-2)q}{qm} = a$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{(n(m)+2)q}{qm} = a$$

co kończy dowód. ❑

Korzystając z powyższego lematu obliczamy:

$$P(7) = \log(1+\tfrac{1}{7}) \approx 0,057 \ , \ P(8) = \log(1+\tfrac{1}{8}) \approx 0,051$$

A zatem cyfra 7 pojawia się częściej na początku liczb postaci 2^n niż cyfra 8.

I na zakończenie jeszcze kilka zadanek:

Zadanie **4** *Wykazać, że w trójkącie równobocznym o boku 4 nie można umieścić 17 punktów tak, by odległość każdych dwóch z nich była większa niż 1.* ❑

Zadanie **5** *W przestrzeni danych jest 9 punktów o współrzędnych całkowitych. Wykazać, że środek jednego z odcinków łączących te punkty jest punktem o współrzędnych całkowitych.* ❑

Zadanie **6** *Pięciokąt wypukły ma wierzchołki w punktach o wspólrzędnych całkowitych. Wykazać, że w jego wnętrzu znajduje się co najmniej jeden punkt o współrzędnych całkowitych.* ❑

Zadanie **7** *Udowodnić, że w grupie* $n > 1$ *osób są zawsze dwie, które mają w tej grupie jednakową liczbę znajomych.* ❑

Zadanie **8** *Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej* n *istnieje jej wielokrotność, którą w systemie dziesiętnym możemy zapisać przy pomocy jedynie cyfr 0 i 1.* ❑

Zadanie **9** *Udowodnić, że wśród dowolnie wybranych 11 liczb rzeczywistych co namniej dwie mają rozwinięcia dziesiętne pokrywające się w nieskończonej ilości miejsc po przecinku (jeśli liczba ma skończone rozwinięcie dziesiętne, to uzupełniamy je zerami).* ❑

Zadanie **10** *Spośród liczb* $1, 2, \ldots, 200$ *wybieramy dowolne 101 liczb. Wykazać, że wśród wybranych liczb jest para* a *i* b *taka, że* a *dzieli* b. ❑

ZADANIE **11** *Udowodnić, że jeśli dane jest 7 liczb naturalnych, to można z nich wybrać 2 liczby tak, że* $10|a^2 - b^2$*.* ❏

ZADANIE **12** *100 zawodników rozgrywa turniej szachowy systemem każdy z każdym. Po 32 rundach turniej został przerwany. Wykazać, że co najmniej 4 pary graczy uzyskały ten sam wynik.* ❏

ZADANIE **13** *Dane są liczby całkowite nieujemne* $a_1 < a_2 < \ldots < a_{101}$*. Wykazać, że można wybrać spośród nich 4 różne liczby* a_k, a_l, a_m, a_n *tak, że liczba* $a_k + a_l - a_m - a_n$ *dzieli się przez 5050.* ❏

ZADANIE **14** *Dane jest 1985 liczb naturalnych, których żaden dzielnik pierwszy nie jest większy niż 23. Pokazać, że iloczyn pewnych 4 z nich jest czwartą potęgą pewnej liczby naturalnej.* ❏

Bibliografia

[1] J. Górnicki, *Prosta zasada*, Matematyka 5/99

[2] A. Czogała, M. Szyjewski, *Teoria liczb*, Skrypt UŚl

[3] W. I. Arnold, *Równania różniczkowe zwyczajne*, PWN, Warszawa 1975

[4] J. Dynkin, W. Uspienski, *Ciekawe zagadnienia matematyczne*, PZWS, Warszawa 1956

[5] R. Kołodziej, *Twierdzenie Ponceleta dla bilardu w elipsie*, Delta 6/1997

[6] A. Mąkowski, *Zasada szufladkowa Dirichleta*, WSiP, Warszawa 1980

[7] W. Narkiewicz, *Teoria liczb*, PWN, Warszawa 1990

[8] P. Ribbenboim, *Mała księga wielkich liczb pierwszych*, WNT, Warszawa 1997

[9] W. Sierpiński, *250 zadań z elementarnej teorii liczb*, WSiP, Warszawa 1987

[10] P. Strzelecki, *O potęgach dwójki*, Delta 7/1994

[11] W. Więsław, *Matematyka i jej historia*, Wyd. Nowik, Opole 1997

[12] N. J. Wilenkin, *Opowieści o zbiorach*, PWN, Warszawa 1975

[13] H. Żołądek, *Zasada szufladkowa Dirichleta w mechanice*, Delta 3/1998