Algebry Liego w fizyce

Opracował na podstawie cytowanej bibliografii:

Paweł Gładki

Referat wygłoszony na ćwiczeniach z Matematycznych Problemów Fizyki dn. 9.I.2002r.

W roku 1928 Hermann Weyl w książce *Gruppentheorie und Quantenmechanik* jako pierwszy zwrócił uwagę na znaczenie symetrii w opisie zjawisk fizycznych. Od tego momentu datuje się żywiołowy rozwój nowoczesnej teorii grup, dla której potrzeby fizyków stały się najpoważniejszym bodźcem rozwojowym. Obecnie olbrzymi zasięg pojęć i metod teorii grup w fizyce sprawia, że teoria ta nie może być już traktowana jako dział matematyki, który interesuje tylko specjalistów. Elementy teorii grup są dzisiaj nieodzowną częścią wykształcenia fizyka teoretyka.

Celem niniejszego referatu jest podanie kilku podstawowych faktów dotyczących algebry Liego grupy obrotów $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$. Grupa ta ma ogromne znaczenie w fizyce - wystarczy powiedzieć, że budowę atomu wodoru można niemal całkowicie opisać w terminach reprezentacji algebry Liego $\mathfrak{o}(3, \mathbb{R})$.

Niech $V, V_1, \ldots, V_n, W$ będą przestrzeniami liniowymi nad ciałem $\mathbb{K}$.

Definicja **1** *Odwzorowanie $F : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ nazywamy $n-$***liniowym***, gdy dla wszelkich $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in V_1 \times \ldots \times V_{i-1} \times V_{i+1} \times \ldots \times V_n$ odwzorowanie*

$$edge V_i \ni v \mapsto F(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in W$$

jest liniowe.

Definicja **2** *Odwzorowanie $n-$liniowe $F : V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ nazywamy* **formą $n-$liniową**.

Definicja **3** *Odwzorowanie $Q : V \to \mathbb{K}$ nazywamy* **formą kwadratową***, gdy:*

(i) $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v)$*, dla* $v \in V$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$

(ii) Odwzorowanie:

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \mapsto B(v_1, v_2) := \frac{1}{2}(Q(v_1 + v_2) - Q(v_1), -Q(v_2)) \in \mathbb{K}$$

jest 2-liniowe.

Uwaga 1 Jeżeli $Q : V \to \mathbb{K}$ jest formą kwadratową, to odwzorowanie:

$$V \times V \ni (v_1, v_2) \mapsto B(v_1, v_2) \in \mathbb{K}$$

jest formą 2-liniową. Nazywamy ją **formą** $2-$**liniową odpowiadającą formie kwadratowej Q.**

`Przykłady:`

(1) Odwzorowanie $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dane wzorem:

$$Q(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

jest formą kwadratową. Nazywamy ją **formą kanoniczną**. Odpowiadająca jej forma dwuliniowa wyraża się wzorem:

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

DEFINICJA **4** *Jeżeli* $Q : V \to \mathbb{K}$ *jest formą kwadratową a* $B : V \times V \to \mathbb{K}$ *odpowiadającą jej formą 2-liniową, to wektory* $u, v \in V$ *nazywamy* **ortogonalnymi względem formy** Q*, gdy* $B(u, v) = 0$

`Przykłady:`

(2) Jeżeli $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest formą kanoniczną, to ortogonalność względem tej formy jest po prostu zwykłą ortogonalnością.

DEFINICJA **5** *Jeżeli* $Q_1 : V_1 \to \mathbb{K}$ *jest formą kwadratową a* $B_1 : V_1 \times V_1 \to \mathbb{K}$ *odpowiadającą jej formą 2-liniową oraz* $Q_2 : V_2 \to \mathbb{K}$ *jest formą kwadratową a* $B_2 : V_2 \times V_2 \to \mathbb{K}$ *odpowiadającą jej formą 2-liniową, to odwzorowanie liniowe* $F : V_1 \to V_2$ *nazywamy* **ortogonalnym względem form** Q_1**,** Q_2*, gdy:*

$$\bigwedge_{u,v \in V_1} B_1(u, v) = B_2(F(u), F(v))$$

Uwaga 2 Jeżeli $Q : V \to \mathbb{K}$ jest formą kwadratową, to zbiór:

$$O(Q) := \{F \in \mathsf{End}(V) : \ F \text{ jest ortogonalne}\}$$

jest grupą. Nazywamy ją **grupą ortogonalną formy** Q**.**

`Przykłady:`

(3) Jeżeli $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest formą kanoniczną, to jej grupę ortogonalną oznaczamy $O(3)$. Grupa ta jest izomorficzna z grupą rzeczywistych macierzy ortogonalnych stopnia 3.

Uwaga 3 Jeżeli $\dim V = n$, jeżeli $Q : V \to \mathbb{K}$ jest formą kwadratową a $B : V \times V \to \mathbb{K}$ odpowiadającą jej formą 2-liniową oraz odwzorowanie:

$$V \ni v \mapsto B(v, \cdot) \in \mathbb{K}^V$$

jest różnowartościowe, to odwzorowanie $\det : O(Q) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$ jest homomorfizmem grup. Jego jądro nazywamy **specjalną grupą ortogonalną formy** Q i oznaczamy $SO(Q)$

`Przykłady:`

(4) Jeżeli $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ jest formą kanoniczną, to jej specjalną grupę ortogonalną oznaczamy $SO(3)$ i nazywamy **grupą obrotów**.

Definicja **6** *Strukturę algebraiczną* $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *nazywamy* **algebrą Liego**, *gdy* $\mathfrak{g}$ *jest przestrzenią liniową nad ciałem* $\mathbb{K}$, *zaś* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *odwzorowaniem 2-linowym, zwanym* **nawiasem Liego** *lub* **komutatorem**, *o własnościach:*

(i) $[x, y] = -[y, x]$, *dla* $x, y \in \mathfrak{g}$ **(antysymetria)**

(ii) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, *dla* $x, y, z \in \mathfrak{g}$ **(tożsamość Jacobiego)**

Algebrę Liego $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ *oznaczamy krótko* $\mathfrak{g}$.

W naturalny sposób na teorię algebr Liego przenoszą się pojęcia podalgebry Liego, homomorfizmu algebr Liego itp.
`Przykłady:`

(5) $(\mathsf{End}(V), [\cdot,\cdot])$ gdzie $[F, H] := F \circ H - H \circ F$ jest algebrą Liego. Nazywamy ją **ogólną liniową algebrą Liego** i oznaczamy $\mathfrak{gl}(V)$.

(6) $(M_n^n(\mathbb{K}), [\cdot,\cdot])$ gdzie $[A, B] := AB - BA$ jest algebrą Liego. Oznaczamy ją $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.

Teoria algebr Liego wiąże się ściśle z teorią **grup Liego**. W tej teorii, którą się za chwilę zajmiemy, występują jedynie algebry Liego skończonego wymiaru. Odtąd zakładamy, że $\dim \mathfrak{g} = n$. W tym przypadku oczywiście algebry Liego $\mathfrak{gl}(V)$ i $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ są izomorficzne.

Uwaga 4 Jeżeli $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ jest algebrą Liego i $(x_1, \dots, x_n)$ jest bazą $\mathfrak{g}$, to:

(i) Komutator jest wyznaczony jednoznacznie przez wartości przyjmowane na elementach x_i, x_j, $i, j \in \{1, \dots, n\}$

(ii) Niech:

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

Elementy $c_{ij}^k \in \mathbb{K}$ nazywamy **stałymi strukturalnymi** lub **generatorami** algebry Liego $\mathfrak{g}$, a powyższe równości **związkami komutacyjnymi**.

Maniera definiowania algebr Liego za pomocą ich generatorów jest szeroko rozpowszechniona wśród fizyków, dlatego warto o niej pamiętać.

Jak wspomnieliśmy, algebry Liego są ściśle związane z grupami Liego. Jest to pojęcie z pogranicza analizy i topologii. Niewybaczalnym grzechem byłaby próba naszkicowania tej pięknej i bogatej teorii w ramach tak krótkiego refetatu, ograniczymy się zatem do teorii **grup algebraicznych**. Okazuje się, że każda grupa algebraiczna jest grupą Liego. <u>Odtąd zakładamy, że $\dim V = n$ i $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.</u>

Uwaga 5 Jeżeli X i Y są przestrzeniami liniowymi nad tym samym ciałem i $\dim X < +\infty$, $\dim Y < +\infty$, to:

$$X \cong Y \qquad \text{wtw} \qquad \dim X = \dim Y$$

<u>Odtąd zakładamy, że $V = \mathbb{K}^n$</u>

Uwaga 6 Przestrzeń V z normą $\| \cdot \|_n \colon V \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \|_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x_i}$$

jest przestrzenią Banacha. Mówiąc o topologii w przestrzeni V będziemy zawsze mieli na myśli topologię wyznaczoną przez tę normę.

Uwaga 7 Jeżeli X i Y są przestrzeniami Banacha nad tym samym ciałem i $\dim X < +\infty$, to:

$$\varphi : X \to Y \text{ jest liniowe} \qquad \text{wtw} \qquad \varphi : X \to Y \text{ jest liniowe i ciągłe}$$

<u>Odtąd zakładamy, że $L(V, V) = \mathsf{End}(V)$</u>

Uwaga 8 Przestrzeń $\mathsf{End}(V)$ z normą $\| \cdot \| \colon \mathsf{End}(V) \to \mathbb{R}$ daną wzorem:

$$\| F \| = \sup\{ \| F(x_1, \ldots, x_n) \|_n \colon (x_1, \ldots, x_n) \in V \}$$

jest przestrzenią Banacha. Mówiąc o topologii w przestrzeni $\mathsf{End}(V)$ będziemy zawsze mieli na myśli topologię wyznaczoną przez tę normę.

Uwaga 9 Mówiąc o topologii w grupie $GL(V) = \mathsf{Aut}(V) = GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in M_n^n(\mathbb{K}) : \det A \neq 0\}$ będziemy zawsze mieli na myśli topologię indukowaną z przestrzeni $\mathsf{End}(V)$. Podobna uwaga dotyczy wszystkich rozważanych dalej podgrup grupy $\mathsf{End}(V)$.

Definicja 7 *Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest podgrupą grupy $GL(V)$, to zbiór:*

$$\{\gamma(t) \in G : t \in [a, b]\}$$

gdzie $\gamma : \mathbb{R} \to G$ *jest pewnym odwzorowaniem, nazywamy* **krzywą**. *Krzywą nazywamy* **krzywą różniczkowalną**, *gdy odwzorowanie* γ *jest różniczkowalne w [a,b], to znaczy:*

$$\bigwedge_{t_0 \in [a,b]} \bigvee_{\varphi_{t_0} \in L(\mathbb{R}, \mathsf{End}(V))} \bigwedge_{h \in \mathbb{R}} \gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0) = \varphi_{t_0}(h) + r_0(t_0, h)$$

przy czym:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\| r(t_0, h) \|}{|h|} = 0$$

Odwzorowanie $\varphi_{t_0} : \mathbb{R} \to \mathsf{End}(V)$ *nazywamy* **pochodną odwzorowania** γ **w punkcie** t_0 *i oznaczamy* $\frac{d\gamma}{dt}(t)|_{t=t_0}$. *Odwzorowanie:*

$$\mathbb{R} \ni t_0 \mapsto \frac{d\gamma}{dt}(t)|t = t_0 \in L(\mathbb{R}, \mathsf{End}(V))$$

nazywamy **pochodną odwzorowania** γ *i oznaczamy* $\frac{d\gamma}{dt}$.

Uwaga 10 Jeżeli Y jest przestrzenią Banacha, to $L(\mathbb{R}, Y) \cong Y$

<u>Będziemy zakładać, że $\frac{d\gamma}{dt}(t)|_{t=t_0} \in \mathsf{End}(V)$ oraz $\frac{d\gamma}{dt} : \mathbb{R} \to \mathsf{End}(V)$</u>

Definicja **8** *Jeżeli* $G \subset GL(V)$ *jest podgrupą grupy* $GL(V)$ *i* $\{\gamma(t) \in G : t \in [a,b]\}$ *jest krzywą różniczkowalną, to endomorfizm* $\frac{d\gamma}{dt}(t)|_{t=t_0} \in \mathsf{End}(V)$ *nazywamy* **endomorfizmem stycznym do krzywej** γ **w punkcie** $\gamma(t_0)$. *Zbiór wszystkich endomorfizmów stycznych w punkcie* $g \in G$ *do wszystkich krzywych różniczkowalnych z grupy* G *przechodzących przez punkt* $g \in G$ *nazywamy* **przestrzenią styczną do grupy** G **w punkcie** g, *a jej elementy* **endomorfizmami stycznymi do grupy** G **w punkcie** $g \in G$.

Uwaga 11 Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest podgrupą grupy $GL(V)$, to przestrzeń styczna do grupy G w punkcie $g \in G$ jest przestrzenią liniową.

`Przykłady:`

(7) Przestrzenią styczną do $GL(V)$ w punkcie $id_V \in GL(V)$ jest przestrzeń $\mathsf{End}(V)$.

Uwaga 12 Jeżeli $F \in \mathsf{End}(V)$ to szereg:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} F^n$$

jest zbieżny. Jego sumę oznaczać będziemy $\exp(F)$

Uwaga 13 Jeżeli $F, H \in \mathsf{End}(V)$ to zdefiniujmy odwzorowanie $\psi : \mathbb{R} \to \mathsf{End}(V)$ wzorem:

$$\psi(t) = \exp(tF) \circ \exp(tH) \circ \exp(-tF) \circ \exp(-tH)$$

Wówczas:

- $\psi(0) = id_V$
- $\frac{d\psi}{dt}(t)|_{t=0} = 0$
- $\frac{d^2\psi}{dt^2}(t)|_{t=0} = [F, H]$

Wniosek 1 Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest podgrupą grupy $GL(V)$, to przestrzeń styczna do grupy G w punkcie $id_V \in G$ ma naturalną strukturę algebry Liego, jeżeli:

$$\bigwedge_{F \text{ - styczny do } G \text{ w } id_V} \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \exp(tF) \in G$$

Tę algebrę Liego nazywamy **algebrą Liego grupy G** i oznaczamy $\mathfrak{g}$.

TWIERDZENIE 1 *Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest domkniętą podgrupą grupy $GL(V)$, to:*

$$\bigwedge_{F \text{ - styczny do } G \text{ w } id_V} \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \exp(tF) \in G$$

Dowód tego twierdzenia jest trudny i wykorzystuje pewne nieelementarne fakty z teorii zbiorów algebraicznych (geometrii algebraicznej).

DEFINICJA 9 *Jeżeli $P \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{n^2}]$ to* **funkcją wielomianową na $\mathbb{K}^{n^2}$ (na $\mathsf{End}(V)$)** *nazywamy funkcję $P : \mathbb{K}^{n^2} \to \mathbb{K}$ daną wzorem:*

$$P\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = P(a_{11}, \ldots, a_{nn})$$

DEFINICJA 10 *Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest podgrupą grupy $GL(V)$, to nazywamy ją* **grupą algebraiczną**, *gdy istnieje układ funkcji wielomianowych $\{P_i : i \in I\}$ taki, że G jest zbiorem ich wspólnych miejsc zerowych.*

Można wykazać, że dla grupy algebraicznej G istnieje skończony układ funkcji wielomianowych, dla których G jest zbiorem wspólnych miejsc zerowych - dowód jest trudny i wykorzystuje twierdzenie Hilberta o bazie.

`Przykłady`

(8) Grupy $O(Q)$, $SO(Q)$, $SL(V)$ są grupami algebraicznymi.

DEFINICJA 11 *Ciągły homomorfizm $\varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$ nazywamy* **jednoparametrową grupą automorfizmów** *przestrzeni liniowej V. Ciągły homomorfizm $\varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$ nazywamy* **jednoparametrową podgrupą grupy liniowej** *$G \subset GL(V)$, gdy $\varphi(\mathbb{R}) \subset G$*

Uwaga 14 (i) Dla każdego $F \in \mathsf{End}(V)$ odwzorowanie:

$$t \mapsto \exp(tF)$$

jest jednoparametrową grupą automorfizmów przestrzeni liniowej V.

(ii) Dla każdej jednoparametrowej grupy automorfizmów $\varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$:

- φ jest różniczkowalne
- Jeżeli:

$$F := \frac{d\varphi}{dt}(t)|_{t=0}$$

to:

$$\varphi(t) = \exp(tF)$$

Endomorfizm F nazywamy **tworzącą** lub **generatorem** jednoparametrowej grupy automorfizmów przestrzeni liniowej φ.

TWIERDZENIE **2** *Jeżeli $G \subset GL(V)$ jest grupą algebraiczną, a $\mathfrak{g}$ jest jej algebrą Liego, to $\mathfrak{g}$ jest zbiorem generatorów jednoparametrowych podgrup zawartych w G.*

Uwaga 15 Jeżeli $B : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową oraz odwzorowanie:

$$V \ni v \mapsto B(v, \cdot) \in \mathbb{K}^V$$

jest różnowartościowe, to endomorfizm $F \in \mathsf{End}(V)$ taki, że:

$$\bigwedge_{u,v\in V} B(u,v) = B(F(u), B(v))$$

nazywamy **endomorfizmem zachowującym formę** B. Zbiór:

$$G(B) := \{F \in \mathsf{Aut}(V) : F \text{ zachowuje formę } B\}$$

jest grupą i nazywamy ją **grupą automorfizmów zachowujących formę** B

Uwaga 16 $G(B)$ jest grupą algebraiczną

`Przykłady:`

(9) Jeżeli $B : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową odpowiadającą formie kwadratowej Q, to $G(B) = O(Q)$.

(10) Jeżeli $B : V \times V \to \mathbb{K}$ jest iloczynem skalarnym, to $G(B)$ oznaczamy $U(V)$ i nazywamy **grupą unitarną przestrzeni** V.

Uwaga 17 Jeżeli $B : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową oraz odwzorowanie:

$$V \ni v \mapsto B(v, \cdot) \in \mathbb{K}^V$$

jest różnowartościowe, jeżeli $\varphi : \mathbb{R} \to GL(V)$ jest jednoparametrową grupą automorfizmów przestrzeni liniowej V a $F \in \mathsf{End}(V)$ jest generatorem grupy φ, to:

φ jest jednoparametrową podgrupą grupy liniowej $G(B) \subset GL(V)$

wtw

$$(*) \qquad \bigwedge_{u,v \in V} B(F(u),v) + B(u,F(v)) = 0$$

Wniosek 2 Jeżeli $B : V \times V \to \mathbb{K}$ jest formą 2-liniową oraz odwzorowanie:

$$V \ni v \mapsto B(v,\cdot) \in \mathbb{K}^V$$

jest różnowartościowe, to algebrą Liego grupy $G(B)$ jest:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(B) := \{F \in \mathsf{End}(V) : F \text{ ma własność } (*)\}$$

`Przykłady:`

(11) Algebrę Liego grupy $O(3)$ oznaczamy $\mathfrak{o}(3)$ i nazywamy **ortogonalną algebrą Liego rzędu 3**.

(12) Algebrą Liego grupy $SO(3)$ jest $\mathfrak{o}(3)$.

(13) Algebrę Liego grupy $SL(V)$ oznaczamy $\mathfrak{sl}(V)$ i nazywamy **specjalną liniową algebrą Liego**. Jeżeli $V = \mathbb{C}^n$ to stosujemy oznaczenie $\mathfrak{sl}(n)$.

(14) Algebrę Liego grupy $U(V)$ oznaczamy $\mathfrak{u}(V)$ i nazywamy **unitarną algebrą Liego**.

(15) Algebrę Liego grupy $U(3) \cap SL(V)$ oznaczamy $\mathfrak{su}(V)$ i nazywamy **specjalną unitarną algebrą Liego**. Jeżeli $V = \mathbb{C}^n$ to stosujemy oznaczenie $\mathfrak{su}(n)$

Definicja **12** *Jeżeli $\mathfrak{g}$ jest algebrą Liego nad ciałem $\mathbb{K}$, to homomorfizm algebr Liego $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ nazywamy* **reprezentacją algebry Liego $\mathfrak{g}$** *w przestrzeni liniowej V.*

Uwaga 18 (i) Macierze:

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, R_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tworzą bazę algebry Liego $\mathfrak{o}(3)$.

(ii) Jednoparametrowe grupy generowane przez R_i, $i \in \{1,2,3\}$ mają postać:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tR_i)$$

na przykład:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{bmatrix} \in SO(3) \subset O(3)$$

Nazywamy je **jednoparametrowymi grupami obrotów wokół osi** O_x, O_y, O_z.

Uwaga 19 (i) Macierze:

$$S_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, S_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S_3 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

tworzą bazę algebry Liego $\mathfrak{su}(2)$.

(ii) Jednoparametrowe grupy generowane przez S_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ mają postać:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(tS_i)$$

na przykład:

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{bmatrix} \cos\frac{t}{2} & i\sin\frac{t}{2} \\ i\sin\frac{t}{2} & \cos\frac{t}{2} \end{bmatrix}$$

Uwaga 20 Macierze:

$$J^+ = -(S_2 + iS_1), J^- = (-S_2 + iS_1), J^3 = -iS_3$$

tworzą bazę algebry Liego $\mathfrak{sl}(2)$

Uwaga 21 $SU(2)$ jest 2-krotnym nakryciem grupy $SO(3)$, tj. istnieje homomorfizm grupy $SU(2)$ na $SO(3)$ taki, że każdy punkt z $SO(3)$ jest obrazem dokładnie dwóch punktów z $SU(2)$ i $SU(2)$ jest lokalnie homeomorficzna z $SO(3)$

Definicja 13 **Endomorfizm Casimira** *reprezentacji* $\pi : \mathfrak{sl}(2) \to \mathfrak{gl}(V)$ *określamy wzorem:*

$$C_\pi := -(\pi(S_1)^2 + \pi(S_2)^2 + \pi(S_3)^2)$$

W mechanice kwantowej C_π *nazywamy* **operatorem kwadratu momentu pędu**, *a* $-i\pi(S_k)$, $k \in \{1, 2, 3\}$ **operatorami rzutów momentu pędu na osie współrzędnych**. *Wartości własne endomorfizmu* $\pi(J^3)$ *nazywamy* **wartościami rzutu momentu pędu** - *przykładowo dla opisu atomu wodoru używamy nazwy* **magnetyczna liczba kwantowa**

Bibliografia

[1] J. Komorowski, *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, PWN, Warszawa 1978

[2] J. Mozrzymas, *Zastosowania teorii grup w fizyce współczesnej*, PWN, Warszawa 1967

[3] K. Maurin, *Analiza*, PWN, Warszawa 1977

[4] I. Auslander, R. Mac Kenzie, *Wstęp do rozmaitości różniczkowych*, PWN, Warszawa 1967

[5] L.S. Pontriagin, *Grupy topologiczne*, PWN, Warszawa 1961

[6] A. Wawrzyńczyk, *Współczesna teoria funkcji specjalnych*, PWN, Warszawa 1978

[7] H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications Inc., New York 1946