

# PROPOZYCJE TEMATÓW PRAC MAGISTERSKICH

PAWEŁ GŁADKI

## 1. WIELOMIANY DODATNIE, KTÓRE NIE SĄ SUMAMI KWADRATÓW

Wielomian  $n$  zmiennych  $p$  o współczynnikach rzeczywistych nazywamy **dodatnio określonym**, jeżeli nierówność  $p(x) \geq 0$  zachodzi dla wszelkich  $x \in \mathbb{R}^n$ . Podzbiorem zbioru wielomianów dodatnio określonych są oczywiście wielomiany, które są **sumami kwadratów**, a więc wielomiany postaci  $p = \sum_{i=1}^n q_i^2$ , dla pewnych wielomianów  $q_1, \dots, q_n$  – jest jasne, że każdy wielomian, który jest sumą kwadratów, jest dodatnio określony. Okazuje się, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe: klasyczny rezultat Hilberta z 1888 roku pokazuje, że istotnie możliwe jest skonstruowanie wielomianów dodatnio określonych, które nie są sumami kwadratów. Dowód Hilberta, aczkolwiek oparty o wynalezioną przez niego “metodę perturbacji”, nie jest całkowicie konstruktywny i dopiero w 80 lat po Hilbercie udało się podać przykłady wielomianów dodatnio określonych, które nie są sumami kwadratów – są to znane przykłady pochodzące od Motzkina:

$$M(x, y) = 1 - 3x^2y^2 + x^4y^2 + x^2y^4$$

oraz Robinsona:

$$R(x, y) = x^2(-1 + x^2)^2 + y^2(-1 + y^2)^2 - (-1 + x^2)(-1 + y^2)(-1 + x^2 + y^2).$$

W wyniku badań prowadzonych ostatnio przez profesora Hartwiga Bosse z Frankfurtu udało się zgeneralizować powyższe przykłady wielomianów dwóch zmiennych stopnia 6, które są dodatnio określone, acz nie są sumami kwadratów, do klas wielomianów, zwanych wielomianami Motzkina-Robinsona, o takiej samej własności, które ponadto mogą być dowolnie dużego stopnia i dowolnej liczby zmiennych.

Celem pracy będzie przestudiowanie rezultatów Bossego opublikowanych w [1] i przedstawienie szczegółowego dowodu głównego twierdzenia. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności. Zagadnienia związane z wielomianami dodatnio określonymi są tematem żywiwoło rozwijających się badań w najlepszych ośrodkach matematycznych na świecie, w szczególności w Niemczech (w Konstancji, w Lipsku, w Bonn), w Holandii (w Amsterdamie), w Stanach Zjednoczonych (w Atlancie, w San Diego, w Santa Barbara), czy też w Kanadzie (w Saskatoon) i student, który rozwinie w sobie podobne zainteresowania i wykaże się wyjątkowo dobrą pracą magisterską może mieć szansę kontynuowania swoich badań w jednym ze wspomnianych ośrodków.

## LITERATURA

- [1] H. Bosse. *Positive Polynomials that are not Sums of Squares*, 2007, CWI proceedings, Math. Annalen, w druku
- [2] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, AMS Math. Surveys and Monographs 146 (2008) 187+xii stron

## 2. DODATNIOŚĆ, SUMY KWADRATÓW I “POSITIVSTELLENSÄTZE” W \*-ALGEBRACH

Słynny 17-ty problem Hilberta, postawiony w 1900 roku, pyta, czy prawda jest, że jeżeli wielomian  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  przyjmuje nieujemne wartości, to jest sumą kwadratów funkcji wymiernych. Pozytywna odpowiedź na powyższe pytanie została udzielona w 1927 roku przez Artina, który tym samym stworzył

podwaliny nowej dziedziny algebry – rzeczywistej geometrii algebraicznej. Rezultat Artina doczekał się wielu uogólnień.

Niech  $A$  będzie pierścieniem przemiennym z jedyneką, w którym 2 jest elementem odwracalnym. Podzbiór  $M \subset A$  nazywamy **modułem kwadratowym** jeżeli  $M + M \subset M$ ,  $a^2M \subset M$  dla wszelkich  $a \in A$ , oraz  $1 \in M$ . Z kolei **preporządkiem** nazywamy podzbiór  $T \subset A$  taki, że  $T + T \subset T$ ,  $TT \subset T$  oraz  $a^2 \in T$  dla wszelkich  $a \in A$ . Oczywiście każdy preporządek jest modułem kwadratowym. **Porządkiem** nazwiemy podzbiór  $P \subset A$  taki, że  $P + P \subset P$ ,  $PP \subset P$ ,  $P \cup -P = A$ , oraz  $P \cap -P$  jest ideałem pierwszym w  $A$  – widzimy, że każdy porządek jest też preporządkiem.

Rozważmy sytuację, gdy  $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Niech  $S$  będzie skończonym podzbiorem  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  i zdefiniujmy **zbiór semialgebraiczny** wyznaczony przez  $S$ :

$$K_S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) \geq 0, g \in S\}$$

oraz preporządek wyznaczony przez  $S$ :

$$T_S = \{\sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_m g_m : \sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Sigma\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2, g_1, \dots, g_m \in S, m \in \mathbb{N}\},$$

gdzie  $\Sigma\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$  oznacza zbiór wszystkich sum kwadratów pierścienia  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$ . Następujące twierdzenie, pochodzące od Stengle’a, jest przykładem rezultatu o umownej nazwie “positivstellensatz”: niech  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$ . Wówczas:

- (1)  $f > 0$  na zbiorze  $K_S \Leftrightarrow$  istnieją  $p, q \in T_S$  takie, że  $pf = 1 + q$ ;
- (2)  $f \geq 0$  na zbiorze  $K_S \Leftrightarrow$  istnieją  $m \in \mathbb{N}$  oraz  $p, q \in T_S$  takie, że  $pf = f^{2m} + q$ ;
- (3)  $f = 0$  na zbiorze  $K_S \Leftrightarrow$  istnieje  $m \in \mathbb{N}$  takie, że  $-f^{2m} \in T_S$ .

Zauważmy, że w szczególnym przypadku, gdy  $S = \emptyset$ , część (2) twierdzenia jest równoważnym sformułowaniem 17-tego problemu Hilberta.

Pojęcia takie jak dodatniość, moduły kwadratowe, zbiory semialgebraiczne, porządki oraz klasyczne twierdzenia takie, jak “positivstellensatz” weszły już na stałe do kanonu rzeczywistej geometrii algebraicznej i zdążyły doczekać się szeregu uogólnień. Działem rzeczywistej geometrii algebraicznej, który szczególnie żywiłowo rozwija się od ostatnich 2-3 lat jest tzw. nieprzemienna geometria rzeczywista, w której prowadzone są próby wprowadzenia uogólnień klasycznych rezultatów geometrii rzeczywistej na przypadek, gdzie  $A$  jest pierścieniem nieprzemiennym. Sytuacja, w której  $A$  jest  $*$ -algebrą jest szczególnie ważna i była ostatnio badana m.in. przez profesora Konrada Schmüdgena z Lipska.

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie artykułu [2] i zreferowanie jej głównego twierdzenia, jakim jest wersja “positivstellensatz” dla  $*$ -algebr. W tym celu konieczne będzie też zaznajomienie się z pracą przeglądową [1]. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności. Autor wyjątkowo dobrej pracy magisterskiej zainteresowany nieprzemieną geometrią rzeczywistą miałby szansę rozwijania swoich zainteresowań w ośrodkach matematycznych w Słowenii (w Ljubljanie), w Niemczech (w Lipsku), w Stanach Zjednoczonych (w Pasadenie, w San Diego, w Santa Barbara), czy też w Kanadzie (w Saskatoon).

## LITERATURA

- [1] K. Schmüdgen, *Noncommutative real algebraic geometry - some basic concepts and first ideas*; rozdział w: *Emerging applications of algebraic geometry*. M. Putinar i S. Sullivant (redaktorzy), Springer 2009
- [2] K. Schmüdgen, *Algebras of fractions and strict Positivstellensätze for  $*$ -Algebras*, preprint, 2009
- [3] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, AMS Math. Surveys and Monographs 146 (2008) 187+xii stron

## 3. WALUACJE NA CENTRALNYCH ALGEBRACH PROSTYCH

Klasyczna teoria waluacji zajmuje się waluacjami ciał, czyli funkcjami  $v : k \rightarrow \Gamma \cup \{\infty\}$ , gdzie  $k$  jest pewnym ciałem, a  $\Gamma$  uporządkowaną grupą abelową, które spełniają następujące warunki:

- (1)  $v(a) = \infty$  wtedy i tylko wtedy gdy  $a = 0$ ,
- (2)  $v(ab) = v(a) + v(b)$ ,
- (3)  $v(a + b) \geq \min\{v(a), v(b)\}$ .

Znanym wszystkim przykładem waluacji jest waluacja  $p$ -adyczna ciała  $\mathbb{Q}$ . Centralnym problemem teorii waluacji jest zagadnienie rozszerzania waluacji, a więc opis waluacji ciała  $K$ , które jest rozszerzeniem ciała  $k$ ,  $K \supseteq k$ , w oparciu o charakteryzację waluacji ciała  $k$ .

Strukturami algebraicznymi ogólniejszymi niż ciała są algebry – przypomnijmy, że jeśli  $R$  jest pierścieniem, to  $R$ -**algebrą** nazywamy pierścień  $A$  taki, że  $(A, +)$  jest (lewym) unitarnym  $R$ -modułem, oraz  $k(ab) = (ka)b = a(kb)$  dla wszelkich  $k \in R$  oraz  $a, b \in A$ .  $R$ -algebra  $A$ , która dodatkowo jest pierścieniem z dzieleniem nazywana jest **algebrą z dzieleniem**, zaś jeżeli spełnia warunek  $RA \neq 0$  i nie zawiera właściwych podmodułów, to nazywana jest **algebrą prostą**. Na koniec  $k$ -algebrę  $A$  nazywamy **centralną algebrą prostą** jeśli  $k$  jest ciałem,  $A$  jest  $k$ -algebrą prostą, oraz centrum  $A$  równe jest dokładnie ciału  $k$ . Odnotujmy tu, że klasyczna teoria algebr zajmuje się specjalnym przypadkiem, w którym pierścień  $R$  jest ciałem. W takim właśnie klasycznym ujęciu zbudowało w połowie lat 40-tych XX wieku teorię waluacji dla algebr z dzieleniem: dla danej algebry  $D$  można zdefiniować waluacje jako rozszerzenia waluacji określonych nad centrum  $F$  algebry  $D$  ( $F$  jest tu ciałem). Klasyczne są tu trzy twierdzenia:

- (1) pochodzące od Schillinga [3], orzekające, że jeśli waluacja  $v$  ciała  $F$  jest henselowska, to ma dokładnie jedno rozszerzenie do waluacji algebry  $D$ ,
- (2) pochodzące od Ershova [1] i Wadswortha [5], podające warunek konieczny i wystarczający na to, aby daną waluację ciała  $F$  dało się rozszerzyć na  $D$ ,
- (3) pochodzące od Morandiego [2] i podające alternatywny warunek do warunku Ershova-Wadswortha.

W badaniach prowadzonych ostatnio przez profesorów Jeana-Pierre'a Tignola z Louvain-la-Neuve oraz Adriana Wadswortha z San Diego skupiono się na rozszerzeniu teorii waluacji na algebrach z dzieleniem na przypadek centralnych algebr prostych. Celem pracy będzie przestudiowanie najnowszej pracy Tignola i Wadswortha [4] i przedstawienie analogonów twierdzeń (1)-(3) dla centralnych algebr prostych. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności. Autor szczególnie wartościowej pracy magisterskiej miałby potencjalną szansę rozwijania swoich zainteresowań w jednym z ośrodków matematycznych w Belgii (w Louvain-de-Neuve), w Wielkiej Brytanii (w Newcastle), w Irlandii (w Dublinie), w Stanach Zjednoczonych (w San Diego, w Albuquerque), czy też w Kanadzie (w Kingston).

## LITERATURA

- [1] Yu. L. Ershov, *Henselian valuations of division rings and the group  $SK_1$* , Math. USSR Sbornik 45 (1983), 63-71.
- [2] P. Morandi, *The Henselization of a valued division algebra*, J. Algebra 122 (1989), 232-243.
- [3] O. F. G. Schilling, *The theory of valuations*, AMS, 1950
- [4] J.-P. Tignol, A. Wadsworth, *Valuations on algebras with involution*, preprint, 2009
- [5] A. R. Wadsworth, *Extending valuations to finite-dimensional division algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 98 (1986), 20-22.

## 4. PIERŚCIENIE WIERNIE KWADRATOWE

Jak wiadomo, przy pewnych ogólnych założeniach formy kwadratowe można diagonalizować – a zatem badając teorię form kwadratowych można ograniczyć się do form diagonalnych  $\phi(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1^2 +$

$\dots + a_n x_n^2$ , które będziemy prosto zapisywać jako  $\phi = (a_1, \dots, a_n)$ . W szczególnym przypadku, w którym rozpatrujemy formy kwadratowe  $\phi$  i  $\psi$  nad ciałem liczb rzeczywistych, kryterium Sylwestera orzeka, że  $\phi \cong \psi$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\phi$  oraz  $\psi$  mają takie same wymiary i sygnatury. Rezultat ten jest podstawą do zdefiniowania tzw. zredukowanej teorii form kwadratowych nad ciałami uporządkowanymi, w której kryterium Sylwestera przyjęte jest jako definicja izometrii form kwadratowych.

Dokładniej, **porządkiem** w ciele  $k$  nazywamy zbiór  $P$  (który możemy utożsamiać ze zbiorem elementów nieujemnych) taki, że  $P + P \subset P$ ,  $PP \subset P$ ,  $P \cup -P = k$  oraz  $P \cap -P = \{0\}$ . **Sygnaturę**  $sgn_P \phi$  formy  $\phi = (a_1, \dots, a_n)$  względem porządku  $P$  definiujemy jako różnicę między liczbą tych elementów  $a_1, \dots, a_n$ , które należą do  $P$ , a tych, które nie należą – jeżeli oznaczymy przez  $X_k$  zbiór wszystkich porządków ciała  $k$ , to w zredukowanej teorii form kwadratowych zdefiniujemy dwie formy tego samego wymiaru  $\phi$  i  $\psi$  jako **izometryczne**, jeśli  $sgn_P \phi = sgn_P \psi$  dla wszelkich  $P \in X_k$ .

Zdefiniujemy grupę  $G_k = k^*/(\Sigma k^2)^*$  klas sum kwadratów ciała  $k$ . Parę  $(X_k, G_k)$  nazywamy **przestrzenią porządków** ciała  $k$ . Badanie zredukowanej teorii form kwadratowych równoważne jest badaniu przestrzeni porządków ciała  $k$ , w której własności arytmetyczne ciała  $k$  tłumaczą się na własności arytmetyczne grupy  $G_k$ . Od lat 70-tych XX wieku prowadzone są próby wprowadzenia aksjomatycznej teorii przestrzeni porządków – owocem tych prób jest stworzenie teorii abstrakcyjnych przestrzeni porządków przez profesora Murraya Marshalla oraz teorii zredukowanych grup specjalnych przez profesorów Masha Dickmanna i Francisco Miraglia. Obydwie te teorie doczekały się licznych rozwinięć i uogólnień, w szczególności uogólnień na teorie form kwadratowych nad pierścieniami, niekoniecznie zaś nad ciałami.

W ostatniej pracy Dickmanna i Miraglii [1] rozważana jest szeroka i bardzo ogólna klasa pierścieni nazwana przez autorów pierścieniami wiernie kwadratowymi. Dla takiej klasy pierścieni zbudowana jest wersja zredukowanej teorii form kwadratowych, a następnie pokazane jest, w jaki sposób teoria ta może zostać zaksjomatyzowana w języku zredukowanych grup specjalnych.

Celem pracy będzie szczegółowe przestudiowanie artykułu [1] i zreferowanie opublikowanych tam rezultatów. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności, choć należy pamiętać, że praca w tematyce form kwadratowych będzie wymagała opanowania dość zaawansowanego aparatu pojęciowego. Autor dobrej pracy magisterskiej miałby szansę rozwijać swoje zainteresowania w placówkach naukowych we Francji (w Paryżu), w Wielkiej Brytanii (w Manchester), w Irlandii (w Dublinie), czy też w Brazylii (w Sao Paulo).

#### LITERATURA

- [1] M. Dickmann, F. Miraglia, *Faithfully quadratic rings*, preprint, 2009
- [2] M. Dickmann, F. Miraglia, *Special groups. Boolean-theoretic methods in the theory of quadratic forms*, Memoir of the Amer. Math. Society 689, American Mathematical Society, Providence, 2000.
- [3] M. Marshall, *Spaces of orderings and abstract real spectra*, Lecture Notes in Mathematics 1636, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [4] K. Szymiczek, *Wykłady z algebry dwuliniowej*, Uniwersytet Śląski, Katowice, 1991

#### 5. WIELOMIANY DODATNIE NA ZWARTYCH ZBIORACH SEMIALGEBRAICZNYCH

17-ty problem Hilberta, o którym wspominamy także w innych proponowanych tematach, pyta, czy prawda jest, że jeżeli wielomian  $f \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  przyjmuje nieujemne wartości, to jest sumą kwadratów funkcji wymiernych. Pozytywna odpowiedź na powyższe pytanie została udzielona w 1927 roku przez Artina, zaś samo twierdzenie jest od tego czasu nieustannie uogólniane we wszelkich możliwych kierunkach – w szczególności można się zastanawiać, co się stanie, jeśli warunek “ $f \geq 0$ ” zastąpić warunkiem “ $f \geq 0$  na pewnym zbiorze”.

Wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech  $A = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ . Niech  $S$  będzie skończonym podzbiorem  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  i zdefiniujmy **zbiór semialgebraiczny** wyznaczony przez  $S$ :

$$K_S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : g(x_1, \dots, x_n) \geq 0, g \in S\}$$

oraz **preporządek** wyznaczony przez  $S$ :

$$T_S = \{\sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_m g_m : \sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Sigma\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2, g_1, \dots, g_m \in S, m \in \mathbb{N}\},$$

gdzie  $\Sigma\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$  oznacza zbiór wszystkich sum kwadratów pierścienia  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]^2$ . Prawdziwe są następujące dwa klasyczne twierdzenia:

- (1) twierdzenie Schmüdgena, orzekające, że jeśli  $K_S$  jest zbiorem zwartym oraz  $f > 0$  na  $K_S$ , to wówczas  $f \in T_S$ , oraz
- (2) twierdzenie Putinara, powiadające, że przy pewnych założeniach o  $K_S$  silniejszych niż zwartość, warunek  $f > 0$  na  $K_S$  pociąga, że  $f = \sigma_0 + \sigma_1 g_1 + \dots + \sigma_s g_s$ , przy czym  $\sigma_0, \dots, \sigma_s \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ , oraz  $S = \{g_1, \dots, g_s\}$ .

W badaniach prowadzonych przez profesor Vicki Powers z Atlanty pokazano, że obydwa te twierdzenia są szczególnym przypadkiem ogólniejszych testów dodatniości, zwanych przez autorkę certyfikatami dodatniości. Celem pracy będzie przestudiowanie pracy [2] i szczegółowe omówienie zawartych w niej rezultatów. Temat adresowany jest do studentów wszystkich specjalności. Autor wyróżniającej się pracy magisterskiej może mieć nadzieję na rozwijanie swoich zainteresowań w jednym z ośrodków matematycznych zajmujących się podobną tematyką w Słowenii (w Ljubljanie), w Niemczech (w Konstancji, w Passau, w Paderborn), w Wielkiej Brytanii (w Manchester), w Kanadzie (w Saskatoon), czy też w Stanach Zjednoczonych (w Atlancie, w Santa Barbara, w San Diego).

## LITERATURA

- [1] M. Marshall, *Positive polynomials and sums of squares*, AMS Math. Surveys and Monographs 146 (2008) 187+xii stron
- [2] V. Powers, *Rational certificates of positivity on compact semialgebraic sets*, preprint, 2009

## 6. GRUPY WITTA GRASSMANNIANÓW

Niech  $k$  będzie ciałem charakterystyki różnej od 2. Przestrzeń dwuliniową  $M$  nad ciałem  $k$  nazywamy **przestrzenią metaboliczną**, jeżeli

$$M \cong P_1 \perp \dots \perp P_k,$$

gdzie  $P_1, \dots, P_k$  są płaszczyznami symetrycznymi, a symbol  $\perp$  oznacza sumę prostą ortogonalną. Dwie przestrzenie dwuliniowe  $U$  i  $V$  nazwiemy **podobnymi w sensie Witt**, jeżeli istnieją przestrzenie metaboliczne  $M_1$  i  $M_2$  takie, że

$$M_1 \perp U \cong M_2 \perp V.$$

Okazuje się, że relacja ta jest relacją równoważnościową – wobec tego możemy rozważać jej klasy równoważności, które nazywać będziemy **klasami podobieństwa** przestrzeni  $U$  i oznaczać przez  $\langle U \rangle$ . Jeżeli  $A$  jest macierzą  $U$  w pewnej bazie, to będziemy też pisać  $\langle A \rangle$ , zaś jeśli  $A$  jest macierzą diagonalną o wyrazach  $a_1, \dots, a_n$ , będziemy po prostu pisali  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ . Jeśli na klasach podobieństwa wprowadzimy operację dodawania wzorem:

$$\langle V \rangle \oplus \langle U \rangle = \langle V \perp U \rangle,$$

to otrzymamy grupę, którą nazywać będziemy **grupą Witt** ciała  $k$ .

Grupa Witta jest pierwszym z przykładów  $K$ –funktorów, którymi zajmuje się algebraiczna  $K$ –teoria. Takie ogólniejsze spojrzenie na grupy Witta pozwala zdefiniować grupy Witta pierścieni, rozmaitości algebraicznych, czy, ogólnie, schematów, w szczególności rozmaitości Grassmanna zwanych też grassmannianami. Choć grupy Witta schematów zostały zdefiniowane już kilkadziesiąt lat temu, a grassmanniany są klasycznymi obiektami badanymi w geometrii algebraicznej, dopiero w ostatnich latach udało się opracować narzędzia, dzięki którym możliwe stało się obliczenie grup Witta grassmannianów: we współczesnym ujęciu obliczanie grupy Witta (czyli  $K$ –teorii, lub kohomologii, lub grup Chow) rozmaitości komórkowych (których szczególnym przypadkiem są grassmanniany) opiera się na czterech głównych filarach:

- (1) długim dokładnym ciągu lokalizacyjnym dla kohomologii rozpatrywanego schematu,
- (2) twierdzeniu o dévissageach,
- (3) niezmienniczości homotopijnej,
- (4) rozszczepianiu długich dokładnych ciągów lokalizacyjnych w pewien specjalny sposób.

Celem pracy będzie przestudiowanie artykułu [1] i przedstawienie obliczenia grup Witta rozmaitości Grassmanna. Konieczne będzie też opanowanie i przedstawienie zaawansowanego aparatu pojęciowego potrzebnego do zrozumienia dyskutowanej problematyki. Temat adresowany jest do studentów sekcji teoretycznej. Autor dobrej pracy magisterskiej miałby potencjalną szansę dalszego rozwoju w ośrodkach matematycznych w Rosji (w Sankt Petersburgu), w Niemczech (w Monachium, w Regensburgu), we Francji (w Paryżu, w Lens), w Wielkiej Brytanii (w Cambridge, w Oxford, w Nottingham), w Irlandii (w Dublinie), w Stanach Zjednoczonych (w Los Angeles, w Evanston, w Princeton, w Berkeley, w Santa Barbara), czy w Kanadzie (w London).

#### LITERATURA

- [1] P. Balmer, B. Calmes, *Witt groups of Grassmann varieties*, preprint, 2008
- [2] C. Weibel, *An introduction to algebraic K-theory*, <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html>